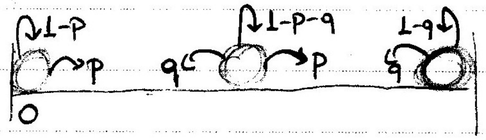


<u>Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγματα ανάκλασης</u>

Ένας τ.π. έχει 2 φρ. ανάκλ. στο 0, α σε διακριτό χρόνο μετά τη n-οστή μετατόπιση και διακριτό χώρο καταστάσεων $S=\{1,2,\dots,\alpha\}$

<u>Πρόταση-Θεώρημα</u>

Όταν το πλήθος των καταστάσεων μιας στοχ.διαδ. είναι πεπερασμένο, υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες.
(Δηλ. μας εξασφαλίζει την ύπαρξη των οριακών πιθανοτήτων)

$P_{jk}^{(n)} = P(X_n=k \mid X_0=j)$, $0\le j$ και $k\le \alpha$

μας ενδιαφέρει: $\lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(n)} = \Pi_k = ;$, $0\le k\le \alpha$

Θέλω να προσδιορίσω τις $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_\alpha$, $0\le \Pi_i\le 1$, $\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i = 1$

$$P_{j0}^{(n)} = P\begin{pmatrix} \overset{A_1}{\text{να έχω πάει στο } n-1 \text{ βήμα στη θέση 0 και να παραμείνει}} \\ \text{ή να έχω πάει στο } \underset{A_2}{n-1} \text{ βήμα στη θέση 1 και από εκεί } 1\to 0 \end{pmatrix} \overset{A_1, A_2 \text{ ανεξάρτητα}}{=} P(A_1)+P(A_2)$$

$$= P(A_{11}\cap A_{12}) + P(A_{21}\cap A_{22}) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(A_{11})P(A_{12}) + P(A_{21})P(A_{22}) \Leftrightarrow$$

$$P_{j0}^{(n)} = (1-p)P_{j0}^{(n-1)} + qP_{j1}^{(n-1)}$$

$$P_{j1}^{(n)} = P\begin{pmatrix} \text{να έχω πάει στο } n-1 \text{ στο 0 και } 0\to 1 \\ \text{ή να έχω πάει στο } n-1 \text{ στο 1 και } 1\to 1 \\ \text{ή να έχω πάει στο } n-1 \text{ στο 2 και } 2\to 1 \end{pmatrix} =$$

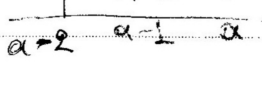
$$= P_{j0}^{(n-1)}p + P_{j1}^{(n-1)}(1-p-q) + P_{j2}^{(n-1)}q \Leftrightarrow$$

$$P_{j1}^{(n)} = p\,P_{j0}^{(n-1)} + (1-p-q)P_{j1}^{(n-1)} + qP_{j2}^{(n-1)}$$

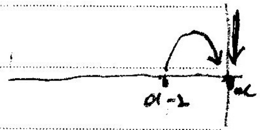
$$P_{j2}^{(n)} = P_{j1}^{(n-1)}\cdot p + P_{j2}^{(n-1)}(1-p-q) + P_{j3}^{(n-1)}q$$

$\vdots$

$$P_{j,\alpha-1}^{(n)} = P_{j,\alpha-2}^{(n-1)} + (1-p-q)P_{j,\alpha-1}^{(n-1)} + q\,P_{j\alpha}^{(n-1)}$$



και $P_{j\alpha}^{(n)} = P_{j,\alpha-1}^{(n-1)} \cdot p + P_{j\alpha}^{(n-1)}(1-q)$



παίρνοντας όρια έχω:

$$\left.\begin{aligned}
\pi_0 &= (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \\
\pi_1 &= p\pi_0 + (1-p-q)\pi_1 + q\pi_2 \\
\pi_2 &= p\pi_1 + (1-p-q)\pi_2 + q\pi_3 \\
&\vdots \\
\pi_{\alpha-1} &= p\pi_{\alpha-2} + (1-p-q)\pi_{\alpha-1} + q\pi_\alpha \\
\pi_\alpha &= p\pi_{\alpha-1} + (1-p)\pi_\alpha
\end{aligned}\right\} \text{ λύνω το σύστημα}$$

με $\sum_{i=0}^{\alpha}\pi_i = 1$

1ος τρόπος επίλυσης

- $\pi_0 = (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \Rightarrow p\pi_0 = q\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0$
- $\pi_1 = p\pi_0 + (1-q-p)\pi_1 + q\pi_2 \Rightarrow$

  $\pi_1 = q p_1 + (1-p-q)\pi_1 + q\pi_2 \Rightarrow p\pi_1 = q\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\pi_0$
- $\pi_2 = q\pi_2 + (1-p-q)\pi_2 + q\pi_3 \Rightarrow p\pi_2 = q\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 = \frac{q}{p}\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3\pi_0$

$\vdots$ άρα

$\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0 \quad , i=0,\dots,\alpha$ και άρα

$$\sum_{i=0}^{\alpha}\pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0\sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1$$

→ Αν $\frac{p}{q} \neq 1 \, (p \neq q)$ τότε $\pi_0 \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\alpha+1} - 1}{\frac{p}{q} - 1} = 1 \Rightarrow$

$$\pi_0 = \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{\alpha+1}} \Rightarrow \pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \frac{1-p/q}{1-(p/q)^{\alpha+1}}$$

→ Αν $p = q$ τότε $\pi_0\sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right)^i = \pi_0\sum_{i=0}^{\alpha}1 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\alpha+1}$

και $\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \cdot \pi_0 = \pi_0$ → ισοπίθανα

2ος τρόπος λύσης

Ορίζουμε την πιθανογεννήτρια: $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{\alpha} x^i \Pi_i$

άρα $\Pi(x) = x^0 \Pi_0 + \dots + x^\alpha \Pi_\alpha$

πολλ/ζουμε το σύστημα ~~με~~ της προηγ. σελ. ~~με~~

αντίστοιχα με $x^0, \dots, x^\alpha$ και έχω:

$$\Pi(x) = p\left(x^1\Pi_0 + x^2\Pi_1 + \dots + x^{\alpha-1}\Pi_{\alpha-2} + x^\alpha \Pi_{\alpha-1}\right)$$

$$+ q\left(x^0\Pi_1 + x^1\Pi_2 + x^2\Pi_3 + \dots + x^{\alpha-1}\Pi_\alpha\right)$$

$$+ (1-p-q)\left(x^1\Pi_1 + x^2\Pi_2 + \dots + x^{\alpha-1}\Pi_{\alpha-1}\right)$$

$$+ (1-p)x^0\Pi_0 + (1-q)x^\alpha \Pi_\alpha$$

$$= p\cdot x \cdot\left(\Pi_0 + x^1\Pi_1 + \dots + x^{\alpha-2}\Pi_{\alpha-2} + x^{\alpha-1}\Pi_{\alpha-1}\right) + \text{τους υπόλοιπους όρους}$$

$$= px\left(\Pi(x) - x^\alpha \Pi_\alpha\right) + \text{τους υπόλοιπους όρους}$$

$$= px\left(\Pi(x) - x^\alpha\Pi_\alpha\right) + \frac{q}{x}\left(x^1\Pi_1 + \dots + x^\alpha\Pi_\alpha\right) + \text{τους υπόλ. όρους} =$$

$$= px\left(\Pi(x) - x^\alpha\Pi_\alpha\right) + \frac{q}{x}\left(\Pi(x) - \Pi_0\right) + (1-p-q)\left(\Pi(x) - \Pi_0 - x^\alpha\Pi_\alpha\right)$$

$$+ (1-p)x^0\Pi_0 + (1-q)x^\alpha\Pi_\alpha \Longrightarrow$$

$$\Pi(x)\left[1 - px - \frac{q}{x} - (1-p-q)\right] = -px^{\alpha+1}\Pi_\alpha - \frac{q}{x}\Pi_0 - (1-p-q)\Pi_0$$

$$- (1-p-q)x^\alpha\Pi_\alpha + (1-p)\Pi_0 + (1-q)x^\alpha\Pi_\alpha \Longrightarrow$$

$$-\Pi(x)\cdot\left[px + \frac{q}{x} - (p+q)\right] = -px^{\alpha+1}\Pi_\alpha - \frac{q}{x}\Pi_0 + q\Pi_0 + px^\alpha\Pi_\alpha \Rightarrow$$

$$-\Pi(x)\left[px^2 + q - (p+q)x\right] = -px^{\alpha+2}\Pi_\alpha - q\Pi_0 + q\Pi_0 x + px^{\alpha+1}\Pi_\alpha \Rightarrow$$

$$-\Pi(x)\left[px^2 - (p+q)x + q\right] = px^{\alpha+1}\Pi_\alpha(1-x) - q\Pi_0(1-x) \Rightarrow$$

$$-\Pi(x)\left[px^2 - (p+q)x + q\right] = -\left(px^{\alpha-1}\Pi_\alpha - q\Pi_0\right)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Pi(x) = \frac{\left(px^{\alpha-1}\Pi_\alpha - q\Pi_0\right)(x-1)}{px^2 - (p+q)x + q}$$

Ρίζες παρονομαστή είναι και ρίζες του αριθμητή.

Ρίζα −||− : $px^2 - (p+q)x + q = 0$

$$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{q}{p} \end{cases}$$

άρα $\Pi(x) = \dfrac{\left(px^{\alpha-1}\Pi_\alpha - q\Pi_0\right)(x-1)}{p(x-1)\left(x - \frac{q}{p}\right)}$ Πρέπει $\frac{q}{p}$: ρίζα αριθμητή

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha+1}\Pi_\alpha - q\Pi_0 = 0 \Rightarrow \Pi_\alpha = \frac{p^\alpha \Pi_0}{q^\alpha} = \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha \Pi_0$$

άρα $\Pi(x) = \dfrac{p x^{\alpha+1}\frac{p^{\alpha}}{q^{\alpha}}\Pi_0 - q\Pi_0}{p\left(x-\frac{q}{p}\right)} = \dfrac{\left(\frac{p^{\alpha+1}}{q^{\alpha}}x^{\alpha+1}-q\right)\Pi_0}{p\left(x-\frac{q}{p}\right)}$

$= \dfrac{q\left[\frac{p^{\alpha+1}}{q^{\alpha+1}}x^{\alpha-1}-1\right]\Pi_0}{q\left[\frac{p}{q}x-1\right]}$

Αν πάρω $\lambda=\frac{p}{q}x$ τότε βλέπω ότι μπορώ να το γράψω ως άθροισμα: $\Pi(x)=\sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}x\right)^i\Pi_0 = \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right)^i \Pi_0\, x^i$

$\Rightarrow \Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0, \quad i=0,\dots,\alpha$

$\sum_{i=0}^{\alpha} \Pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\alpha} \left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0 = 1$

→ Αν $p=q$ τότε: $\sum_{i=0}^{\alpha} \Pi_0 = 1 \Rightarrow \Pi_0=\frac{1}{\alpha+1}$ και $\Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i\Pi_0 = \frac{1}{\alpha+1}$

→ Αν $p\neq q$ τότε $\Pi_0\sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow \Pi_0 = \dfrac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{\alpha+1}}$

Πιθανογεννήτριες

Έστω X μία διακριτή τυχ. μεταβλ. μη αρνητική ονομάζουμε γεννήτρια πιθανοτήτων ή πιθανογεννήτρια την

$\Pi(s)=E(s^X) \overset{X \text{ διακρ.}}{=\!=} \sum_x s^x P(X=x), \quad |s|<R$

Παρατηρήσεις

1) $P(X=x)$ είναι ο συντελεστής του s^x, δηλ.
$P(X=1)$ — " — του s^1
$P(X=2)$ — " — s^2

2) $\frac{d\Pi(s)}{ds} = E(Xs^{X-1}) \xRightarrow{s=1} \left[\frac{d\Pi(s)}{ds}\right]_{s=1} = E(X)$

$\Pi''(s)=E\left(X(X-1)s^{X-2}\right)$

$\Pi''(1)=E(X^2-X) \Rightarrow \Pi''(1)+E(X)=E(X^2)$

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$ και άρα μπορεί να βρεθεί!

3) $\Pi(s)=\sum_x s^x P(X=x) = P(X=0)+s^1P(X=1)+s^2P(X=2)+\dots$

$\Pi(0)=P(X=0)$

$\Pi'(s)=P(X=1)+2sP(X=2)+3s^2P(X=3)+\dots$

$\Pi'(0)=P(X=1)$

$\Pi''(s)=2P(X=2)+6sP(X=3)+\dots$

$\Pi''(0)=2P(X=2) \Rightarrow P(X=2)=\frac{\Pi''(0)}{2}$ άρα γενικά

$P(X=k)=\frac{\Pi^{(k)}(0)}{k!}$